Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Formel von De Moivre, komplexe Polynomgleichungen**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (3)
Beweisen Sie De Moivre's Formel, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist:

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = (\cos n\phi + i\sin n\phi).$$

Wie können mit dieser Formel sehr einfach Potenzen einer komplexen Zahl berechnet werden?

Aufgabe 2 (1)
Benutzen Sie De Moivre's Formel um folgende Zahlen zu berechnen:

a) $(-2+2i)^3$
b) $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^4$
c) $(3\sqrt{3}-3i)^{10}$
d) $(-6+2\sqrt{3}i)^{10}$
e) $(-e+ei)^{100}$
f) $(\frac{\sqrt{3}}{10}+\frac{1}{10}i)^{30}$

Aufgabe 3 (3)
Beweisen Sie mithilfe von De Moivre's Formel folgende Identitäten:

$$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t \text{ und } \cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t.$$

Aufgabe 4 (2)
Lösen Sie die folgenden Gleichungen der Form $z^n = a$ mit $z, a \in \mathbb{C}$:

a) $z^3 = -2+2i$
b) $z^2 = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
c) $z^3 = 3\sqrt{3}-3i$
d) $z^4 = -6+2\sqrt{3}i$
e) $z^5 = -e+ei$
f) $z^6 = \frac{\sqrt{3}}{10}+\frac{1}{10}i$

Aufgabe 5 (2) Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = \sqrt{3}+\mathrm{i}.$$

Aufgabe 6 (2) Bestimmen und skizzieren Sie die Menge $\left\{ z \in \mathbb{C} \mid z^4 = \dfrac{\mathrm{i}}{-3+3\mathrm{i}} \right\}$.

Aufgabe 7 (2) Es seien $w_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, $w_2 = \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$

a) Bestimmen Sie die Polardarstellung von w_1 bzw. w_2.
b) Lösen Sie die beiden Gleichungen $z^5 = w_1$ bzw. $z^5 = w_2$ nach z.

Aufgabe 8 (3) Beweisen Sie: hat die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$ reelle Lösungen, so ist $\mathrm{Im}(p)\cdot\mathrm{Im}(q) = 0$. Ist die Umkehrung auch wahr?

Aufgabe 9 (2) Finden Sie $w, z \in \mathbb{C}$ mit

a) Produkt -1 und Summe 2.
b) Produkt 2 und Summe 2.

(*Hinweis:* Multiplizieren Sie $(x-w)\cdot(x-z)$ aus. Welche Koeffizienten und welche Nullstellen hat das Polynom?)

Aufgabe 10 (2)
Lösen Sie die folgenden Gleichungen der Form $z^2 + az + b = 0$ mit $z, a, b \in \mathbb{C}$:

a) $z^2 - 2z + 2 = 0$

b) $z^2 + 4z + 6 = 0$

c) $z^2 + 4z - 8 = 0$

d) $z^2 + 8 - 8\sqrt{3}i = 0$

e) $z^2 + iz + 2 = 0$

f) $z^2 + 4z + 4 - \sqrt{2}i = 0$

Aufgabe 11 (2)
Es sei p ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p. Zeigen Sie, dass $\bar{a}$ ebenfalls eine Nullstelle von p ist.

Aufgabe 12 (3)
Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Benutzen Sie diese Reihendarstellungen, um für $z, w \in \mathbb{C}$ folgende Identitäten zu beweisen:

a) $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$

b) $\sin(z + w) = \sin(z) \cdot \cos(w) + \cos(z) \cdot \sin(w)$

c) $\cos(z + w) = \cos(z) \cdot \cos(w) - \sin(z) \cdot \sin(w)$

d) $\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$